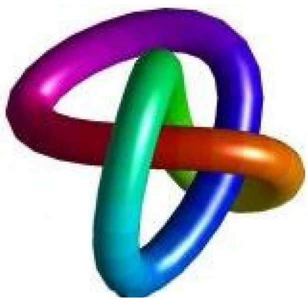
Master in Formatore in didattica della matematica
Bologna – A.A. 2013/14

Note sulla storia del concetto di numero.

A. Gimigliano



Note sulla storia del concetto di numero.

1. Le origini: l'assenza del numero.

Le origini dell'uso dei numeri da parte dell'umanità naturalmente non sono documentate; le prime tracce di qualcosa che si suppone sia un conteggio risalgono a più di 35.000 anni fa, e sono costituite da ossa intagliate con tacche che si pensa indichino un qualche tipo di conteggio (giorni, animali?). Il reperto più antico è forse l'**osso di lebombo**, circa del 35000 a.C. , un osso che riporta 29 tacche distinte. Uno dei reperti più famosi è invece l'osso di Ishango:

Fig. 1.0a: L'osso di Ishango

Anch'esso intagliato con tacche, sulle quali gli studiosi hanno fatto varie ipotesi, tra le quali quella che si tratti di un computo di giorni (un mese lunare).

Nella figura sotto un osso di renna intagliato risalente circa al 15.000 a.C.

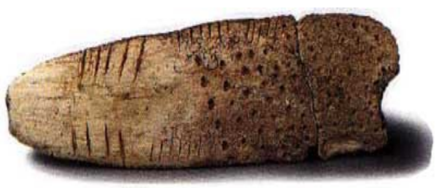


Fig. 1.0b

Anche se non sappiamo datare con precisione quando siano apparsi i primi esempi di "conteggio" nella storia dell'umanità, una cosa è certa: I numeri non sono una parte "necessaria" della cultura degli umani e delle loro capacità di descrivere l'ambiente. Si può avere l'impressione che l'uso dei numeri sia qualcosa di immediato e "naturale", come se fosse innato, implicito nella struttura della nostra mente come la capacità di percepire il caldo e il freddo, o i colori; ma in effetti si può affermare con sicurezza che le cose non stanno affatto così: c'è stato un periodo in cui gli esseri umani ***non avevano il concetto di numero e del contare.***

La migliore prova di ciò è che esistono tuttora popolazioni che non hanno sviluppato il concetto di numero, e nei cui linguaggi le parole "uno", "due" e "molti" rappresentano tuttora le uniche grandezze utilizzate; si tratta, ad esempio, di tribù Zulu e Pigmei in Africa, di Aranda e Kamilarai in Australia, ed altre tribù isolate in Oceania od in Amazzonia (cfr. [**GI**]).

Ad esempio una tribù di cacciatori-raccoglitori che vive in Brasile lungo il fiume Maici, i Pirahã, è stata studiata recentemente (un articolo su *Science*, di Peter Gordon della Columbia University è apparso nel 2004); i Pirahã usano un sistema di conteggio chiamato "uno-due-molti". In esso, la parola per "uno" si traduce come "circa uno" (simile al nostro "uno o due"), la parola per "due" significa "un po' più di uno" (simile al nostro "pochi"), e poi c'è una parola per "molti".

Non è difficile constatare che esiste in ognuno di noi una *percezione diretta* del numero, una capacità immediata di distinguere quando insiemi hanno una quantità diversa oppure uguale di elementi, che non è legata al *contare*. Considerate ad esempio gli insiemi in Fig 2.1:

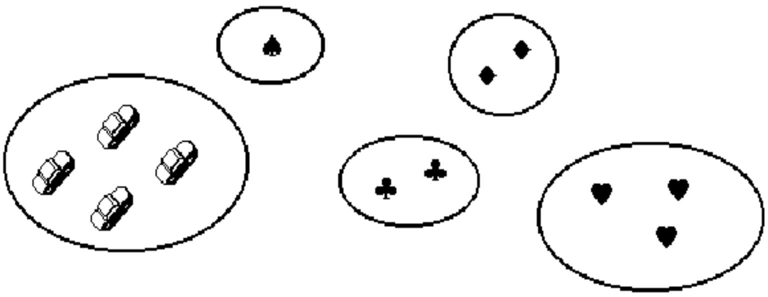


Fig 1.1.

Potete dire quanti sono gli elementi di ognuno di questi insiemi con una semplice occhiata: la percezione è immediata, non avete bisogno di *contare* gli elementi degli insiemi. La cosa è diversa con gli insiemi di Fig. 2.2:

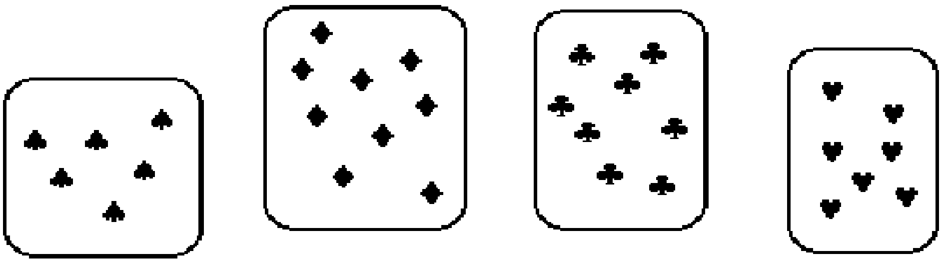


Fig 1.2.

In questo caso avete probabilmente bisogno di *contare* in qualche modo gli elementi degli insiemi per dire quanti sono (lo potete fare raggruppandoli mentalmente a gruppi di due o tre, oppure contandoli uno ad uno, o in altro modo); che conclusione si può trarre da tutto ciò? E' piuttosto semplice: la percezione immediata della quantità esiste, ma non supera all'incirca il numero quattro! Può variare individualmente e con l'allenamento, ma riguarderà sempre numeri piuttosto piccoli.

Questo tipo di percezione non è una "struttura culturale", e nemmeno è una prerogativa umana: molti animali la hanno e la usano; il saper distinguere "ad occhio" le quantità degli insiemi di Fig. 2.1 non rende le nostre "capacità aritmetiche" superiori a quelle di un gatto o di un cardellino, come mostra ad esempio il seguente aneddoto, riportato in [**GI**]:

> "Un castellano aveva deciso di uccidere un corvo che aveva nidificato nella torre di scolta del castello: più volte egli aveva tentato di sorprendere l'uccello, ma bastava che si avvicinasse perché il corvo abbandonasse il nido, si appollaiasse su un albero vicino, da dove tornava non appena l'uomo aveva lasciato la torre. Il castellano risorse ad uno stratagemma: fece entrare due suoi amici nella torre; dopo pochi minuti uno si allontanò e l'altro rimase. Ma il corvo, non cadendo nella trappola, attese che anche il secondo se ne andasse per riprendere il suo posto. La volta seguente entrarono tre uomini, due dei quali poi si allontanarono; ma il terzo ebbe un bell'aspettare l'occasione di catturare il corvo, che si mostrò più paziente di lui. La volta successiva l'esperimento fu ripetuto con quattro uomini, ma sempre invano. Finalmente, lo stratagemma riuscì con cinque persone, poiché l'uccello non era in grado di distinguere più di quattro esseri umani o quattro oggetti."

Diversa è la situazione quando si passi ad analizzare la capacità di distinzione numerica come fatto culturale, guardando a come essa appare nel linguaggio, a come venga elaborata con parole e concetti; come notavamo all'inizio si ha quasi che il primo stadio di questa elaborazione è più arretrato della percezione immediata stessa, non andando oltre al "tre = tanti".

Il fatto che "più di due = una moltitudine" sia stato uno stadio comune nell'evoluzione culturale delle popolazioni umane è testimoniato anche dalle sue tracce nelle lingue odierne: alcune lingue hanno fatto o fanno tuttora distinzione fra singolare, duale e plurale; hanno cioè parole distinte per il plurale di un sostantivo riguardante due oggetti (duale) e per quello riguardante tre o più. Si ha questa situazione in greco antico, nell'arabo e nello sloveno (qui per i verbi).

Altri esempi poi che testimoniano di una passata identità "tre = molti" si trovano piuttosto facilmente:

In Francese: è evidente la comune origine di *troi* (tre) e *très* (molti);
In Latino: la parola *ter* (tre volte) era usata anche per denotare una pluralità.
In Inglese: la parola *thrice* (tre volte) significa anche "molti".
In varie lingue: le parole come "troppo" o "truppa" hanno la stessa origine di "tre".

Inoltre nei geroglifici egiziani la ripetizione per tre volte di un simbolo, o l'aggiungerci tre linee, significava sia "tre oggetti di quel tipo" che il plurale (indeterminato) di quella parola (Fig. 2.3); qualcosa di simile si trova anche nel cinese antico (tre alberi = foresta, tre uomini = folla).

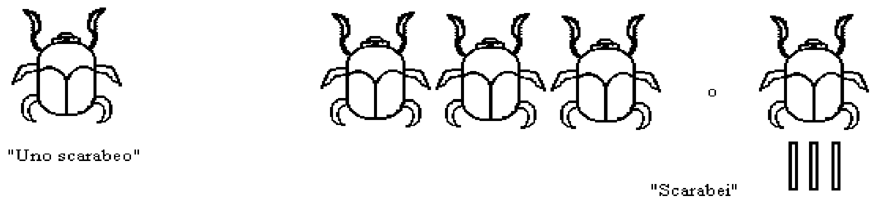


Fig. 1.3 (da [**GI**])

Riassumendo, ciò che abbiamo notato mostra come il distinguere le quantità maggiori di due rappresenti una prima soglia, un primo stadio nell'evoluzione umana verso il concetto di numero, e come in questo stadio già il "tre" rappresenti delle moltitudini indistinte.

Quello che è accaduto nell'evoluzione culturale umana è del resto ben rappresentato in quello che accade nello sviluppo infantile; citiamo di nuovo da [**GI**]:

> *"Tra i sei ed i dodici mesi*, un bimbo acquisisce in misura maggiore o minore una certa capacità di valutazione globale dello spazio occupato dalle cose e dalle persone circostanti; si rappresenta allora insiemi relativamente ristretti di esseri o di oggetti a lui familiari per natura e numero, per cui di solito a quest' età può riunire in un solo gruppo alcuni oggetti analoghi precedentemente separati, e nel caso manchi qualcosa a uno degli insiemi familiari se ne accorge subito. Ma il numero che è semplicemente *sentito* e *avvertito* non viene da lui ancora concepito in maniera astratta, né lo sfiora l'idea si servirsi delle proprie dieci dita per designare uno dei primi numeri.
>
> *Tra dodici e diciotto mesi,* poco alla volta impara a fare una distinzione fra *uno*, *due* e *parecchi* oggetti, e a discernere con un'unica occhiata la relativa entità di due raccolte ridotte di esseri o di oggetti. Le sue capacità numeriche sono però ancora imprigionate tra limiti così angusti che gli è impossibile compiere una netta distinzione tra i numeri e le raccolte di cui essi sono i numeri."

Questa è quindi la situazione, diciamo, "di partenza" nell'evoluzione culturale umana: una capacità di percezione immediata di quantità (all'incirca fino a quattro) che comunque non ci distingue dagli altri animali, e una capacità "culturale" di padronanza del concetto di numero praticamente nulla; vediamo quali sono le tappe della "conquista umana dei numeri".

2 Contare senza numeri.

In realtà quello che si può supporre è che in effetti ben prima del concetto di numero, l'umanità abbia elaborato la "capacità di conteggio"; perché diciamo ciò?

Possiamo immaginare che la necessità di effettuare un qualche tipo di conteggio si sia affermata con l'evolversi di attività umane più complesse, come l'allevamento di animali (ad esempio con la necessità di verificare che un gregge portato al pascolo rientrasse al completo), o l'agricoltura (necessità di una forma di "calendario", conteggio delle "lune" ad esempio, per sapere quando è tempo di seminare o di eseguire altre operazioni agricole), oppure con l'inizio di una pur semplice economia di scambio, che prevedesse baratti di qualche tipo.

Come può ad esempio un pastore, totalmente analfabeta in aritmetica, controllare che il suo gregge di 40 pecore è tornato intatto all'ovile dal pascolo? Egli non ha alcun concetto di "40", però può semplicemente risolvere il suo problema così: prende un bastone e quando fa uscire le sue pecore dall' ovile, fa una tacca sul bastone per ogni pecora che esce. Al ritorno dovrà solo scorrere con un dito le tacche del bastone, una per ogni pecora che rientra, e verificare così di averne quante ce n'erano alla partenza.

Certo, questo non gli dà la possibilità di dire "quante" pecore ha, ma questa procedura risolve il suo problema. Questa "pratica dell'intaglio" è stata, in effetti, in uso presso popolazioni di pastori europei fino in tempi relativamente recenti.

La cosa fondamentale è quindi quella di realizzare una *corrispondenza biunivoca*, che sta alla base del *contare*; in questo caso una corrispondenza fra pecore e tacche sul bastone. Naturalmente poco importa qual è lo strumento di questa corrispondenza: il pastore potrebbe usare per il suo scopo un mucchietto di sassi (sempre uno per ogni pecora) e sarebbe la stessa cosa.

Possiamo figurarci analoghe situazioni di vario tipo: dei cacciatori arrivano presso un'altra tribù con un carico di 23 pellicce, e le vogliono scambiare contro sacchi di mais, diciamo, e si accordano per scambiare due sacchi contro una pelliccia. Come effettueranno lo scambio?

Naturalmente consegneranno le pellicce una ad una, ed in cambio di ognuna riceveranno i due sacchi di mais pattuiti, fino all'esaurimento della merce. Nessuno dei partecipanti allo scambio saprà dire "quanti" oggetti sono stati dati e quanti ricevuti (le 23 pellicce ed i 46 sacchi di mais), ma ognuno sarà sicuro che lo scambio è stato equo.

Un altro esempio è costituito dai rituali religiosi, dai quali è prescritto il dovere di compiere un certo numero di riti, come il recitare un certo numero di preghiere: il fedele non ha bisogno di saper contare se è munito di uno strumento adatto: un *rosario*. Per enunciare i 99 attributi di Allah o per recitare le 100 eulogie obbligatorie dopo la preghiera, i mussulmani usano dei rosari di 99+1 perle; strumenti simili usano i buddisti ed i cristiani (il rosario indica i *Pater Noster* , *Ave Maria* e *Gloria* da recitare).

Sotto, due esempi di rosari: il primo è cattolico, il secondo mussulmano.

Fig. 1.4

In questo stadio, "conteggio" significa sempre "stabilire una corrispondenza biunivoca" fra oggetti, siano essi sassi, perline, conchiglie, tacche su ossa o bastoni, nodi su cordicelle o altro (tutti questo metodi sono stati osservati presso popolazioni e tribù in varie parti del mondo). A questo modo sono stati contati animali, oggetti, giorni, mesi e così via. Perché parliamo di *contare senza il numero*? Perché a questo stadio non c'è il concetto astratto di numero, non ci sono *le parole* per indicare i singoli numeri, né tanto meno un sistema articolato di simboli per essi; c'è solo la pratica del mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi.

Ma bisogna fare attenzione a non sottovalutare l'importanza fondamentale costituita dall'apparire di queste pratiche nelle società umane: nel considerare questa corrispondenza biunivoca fra (ad esempio) pecore e tacche su un bastone, non si costituisce solo una relazione fra insiemi; le tacche vengono infatti usate come *simboli*: esse "stanno per" qualcos'altro (le pecore). Ci sono quindi degli oggetti (tacche, sassi, conchiglie) che assumono un valore astratto, che vengono considerate non per se stessi, ma come simbolo per qualcos'altro; è questo un passo decisivo nell'evoluzione culturale umana, il passo che potrà portare sia alla nascita del sistema dei numeri, che anche alla *scrittura*, con l'invenzione di simboli che "stiano per" le parole o i suoni della lingua parlata.

Tornando al concetto di numero, a questo stadio manca del tutto la padronanza dei due suoi aspetti basilari: il suo essere *cardinale* e/o *ordinale,* e cioè da una parte il suo rappresentare una "quantità" (quanti elementi ci sono in un insieme); dall'altra essere in una precisa posizione in una serie ordinata (in questa accezione, la "conoscenza" di un numero prevede la conoscenza di tutti i precedenti).

In questa fase, se una persona, ad esempio, usa le dita per contare, non le basterà dire "dito anulare" per associare a questa espressione l'idea di quattro oggetti; solo enumerando dal pollice all'anulare si avrà un conteggio: manca un "nome" per i singoli numeri, esiste solo la serie ed il suo susseguirsi.

Il passo essenziale sarà proprio dare un **nome** ai singoli numeri, assegnare una parola ad ognuno di essi. Per prima cosa questa parola sarà un *aggettivo*: quando consideriamo le parole "uno", "due" o "sei" in espressioni come "due cani", "sei barche", "un sasso" esse sono aggettivi numerali, sono attributi di altri sostantivi; qui "due" e "sei" hanno lo stesso valore grammaticale di "rosso" o "saporito".

Analogamente le parole "primo", "secondo", "terzo",… saranno aggettivi che denotano la qualità ordinale di un oggetto in una serie ("la seconda pecora nella fila").

Ad esempio, nel linguaggio di una tribù indiana del British Columbia (Canada), esistevano molti nomi per la serie dei numeri, tutti come aggettivi: una parola veniva usata per contare persone, un'altra per "oggetti lunghi", (tronchi, canoe), un'altra per animali. Quindi ci volevano diverse parole "due", "tre", ecc.. a seconda di che cosa si contava, evidenziando la natura di solo aggettivo delle parole usate.

Questo esempio testimonia come possa essere lenta l'acquisizione di un concetto di numero più generale, che "stacca" l'idea di numero dall'insieme a cui viene volta volta associato. E' l'uso del numero come *sostantivo* che denota sicuramente il passaggio al concetto astratto di numero: quando dico "Il cinque è un numero maggiore di tre", qui la parole "cinque" e "tre" sono sostantivi, ed è chiaro che la mia asserzione riguarda tutti gli insiemi di cinque e di tre oggetti .

3 Contare sempre di più: l'uso della base.

Ora abbiamo visto come il "contare per oggetti" (pietre, tacche, dita) introduce dei simboli numerici, pur mancando ancora il concetto di numero. Il primo problema che tali metodi pongono è che se si vuole contare anche arrivando a quantità piuttosto elevate, avere un solo simbolo per ogni unità rende il tutto piuttosto ingombrante: per un gregge di 100 o più pecore diventa un po' difficile procedere con centinaia di sassi o tacche su bastoni. Il bisogno di un metodo più efficiente si presenta presto.

La soluzione che supera questo problema è quella di usare più simboli, con *valori diversi*; ad esempio un modo ancora in uso presso alcune tribù dell'Africa Occidentale per contare le loro mandrie è quello di infilare conchiglie forate in cordicelle di diverso colore: quelle nella cordicella bianca rappresentano un'unità, ma quelle nella azzurra rappresentano dieci capi di bestiame e quelle in quella rossa cento (vedi Fig. 2.4).

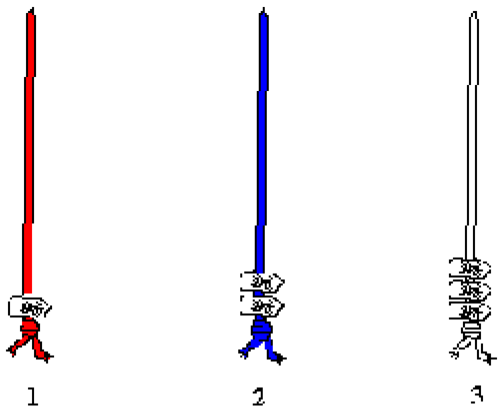


Fig. 1.5

Questo rappresenta un gran passo concettuale: non si fa più solo una corrispondenza biunivoca fra "oggetti da contare" e "oggetti simbolo"; i simboli acquistano valori diversi (in questo caso a seconda del colore della cordicella, in altri a seconda della forma, o della posizione), e questo è un passo notevole verso la padronanza simbolica del numero.

Come possiamo vedere nell'esempio precedente, siamo di fronte ad un "contare in base dieci" analogo al nostro modo di rappresentare i numeri con le cifre. L'uso di una base per contare si è sviluppato in modi diversi in diverse parti del mondo; si rintracciano in varie popolazioni il contare con base 5, oppure 20 (Maya, ad esempio) o 12. I resti di queste numerazioni rimangono nelle varie lingue; resti di un conteggio in base venti sono le parole francesi come *Quatrevingts* = 80 oppure *Quatrevingts-dix* = 90, o *score* = 20 in inglese. Resti di un conteggio per dozzine sono la parola *Grosse* (in francese, anche in italiano commerciale "grossa") per indicare 144 (dodici dozzine, 12^2).

Presso i Sumeri era in uso la base 60, della quale ci rimane l'uso nel misurare gli angoli ed il tempo (minuti, secondi), dovuto al fatto che i popoli della Mesopotamia sono stati i più grandi cultori dell'Astronomia nell'antichità.

4 Il "Far di conto".

I metodi di calcolo si sono sviluppati parallelamente ai metodi di rappresentazione numerica, anche se la capacità di eseguire operazioni è certamente più recente,

Il primo strumento di calcolo è stato senza dubbio il nostro corpo stesso, e soprattutto le mani; dal conteggio elementare sulle dita si è passati a metodi più sviluppati; ad esempio la Fig.2.6 ci mostra l'uso delle falangi per contare fino a 28 sulle due mani (ogni falange rappresenta una unità):

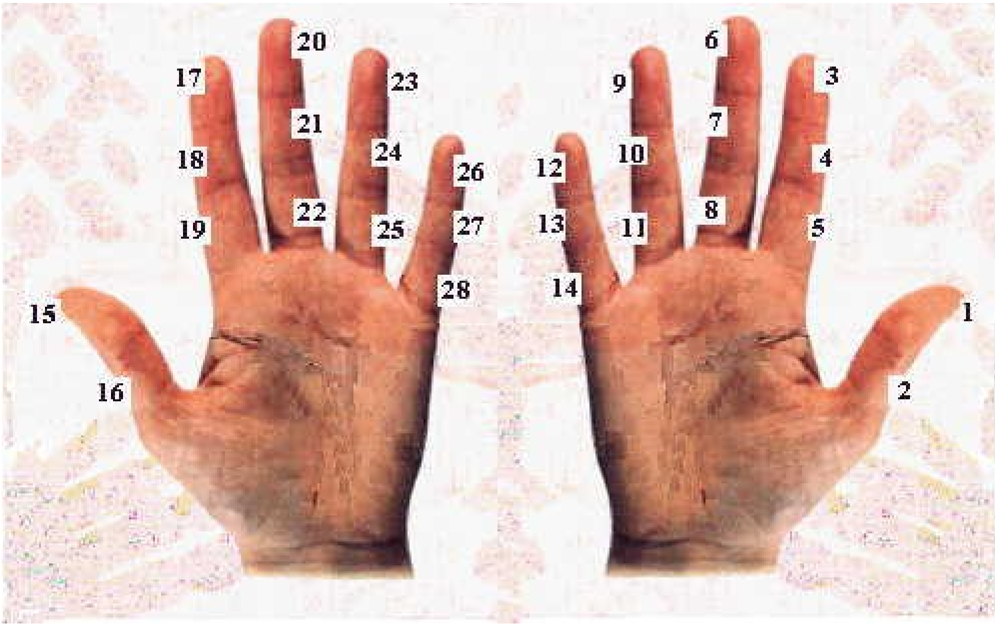


Fig. 1.6

Comunque il conto sulle dita delle mani può raggiungere complessità molto più elevate: ad esempio in alcune zone della Cina si contava fino a 100.000 su una sola mano! Il metodo era questo: ogni dito della mano destra rappresentava una potenza del dieci (il mignolo per le unità, l'anulare per le decine, e così via..); su ogni dito i vari lati delle articolazioni (vedi la seguente Figura 2.7) rappresentavano le cifre da uno a nove.

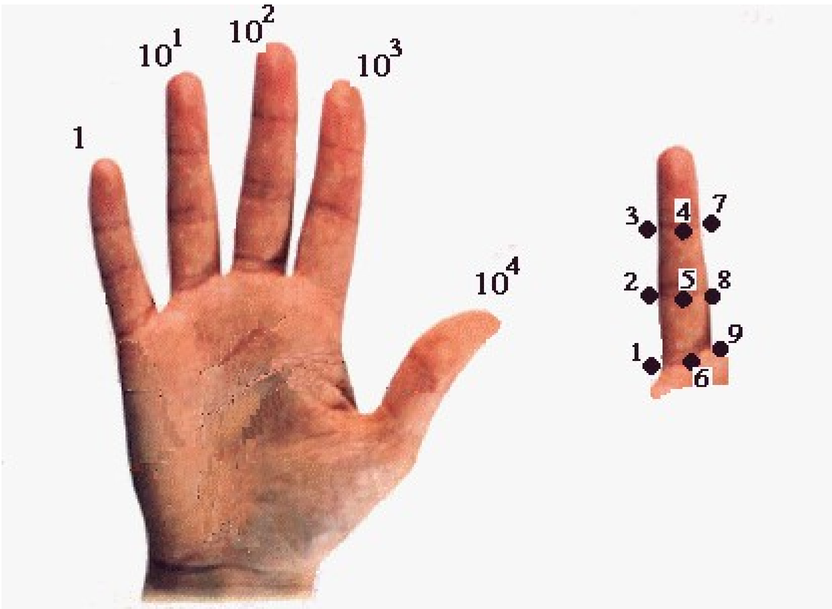


Fig. 1.7

Le dita della mano sinistra si poggiavano nei punti delle articolazioni per segnare la cifra voluta. Ad esempio, per segnare 527, si poggia la punta del mignolo sinistro sull'articolazione in alto a destra del mignolo destro per indicare il 7, l'anulare sinistro su quello destro nel punto che indica 2 (decine) ed il medio sinistro al centro di quello destro per indicare 500.

La pratica di questo metodo permetteva di eseguire molto rapidamente somme e sottrazioni anche con numeri abbastanza elevati.

Uno dei più antichi strumenti di calcolo furono i **gettoni** (analoghi alle *fiches* in uso negli odierni casinò) . L'uso dei gettoni da parte di Sumeri e Elamiti (che abitavano l'attuali Iraq ed Iran) risale circa al 3000 a.C. Erano fatti di argilla essiccata e la loro forma stabiliva il loro valore (vedi Fig. 2.8).

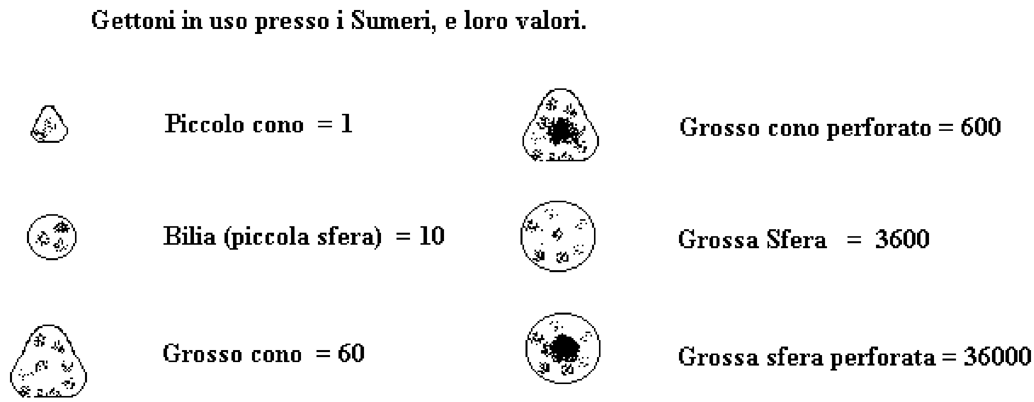


Fig. 1.8

La scelta dei valori per i gettoni evidenzia l'uso da parte dei sumeri della base 60, con base ausiliare 10.

Per quanto riguarda le operazioni: le somme e sottrazioni venivano eseguite in modo ovvio e cioè aggiungendo o togliendo gettoni; nel caso della sottrazione poteva essere necessario prima “spicciolare” un gettone di valore maggiore in gettoni di valore minore, come facciamo con le monete: per fare 20 – 8 si doveva scomporre una delle due biglie che costituiscono il 20 in dieci piccoli coni da un'unità per poi togliere gli 8 indicati dalla sottrazione rimanendo quindi

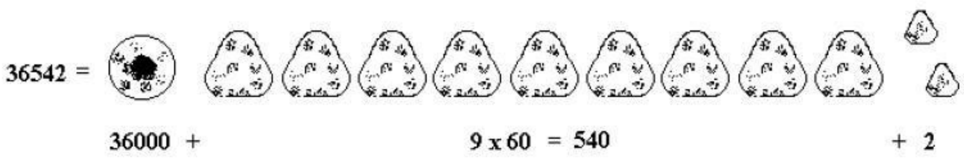
con il risultato 12, dato da una biglia e due piccoli coni.

La moltiplicazione veniva eseguita tramite somme ripetute (ad esempio per moltiplicare 123 per 32, si sommava il 123 per 32 volte); ed infine anche la divisione si poteva effettuare, tramite "spicciolature" successive e divisione in mucchietti. Per esempio per fare (60:3) bisognava “spicciolare” un grosso cono da 60 in 6 bilie da dieci che si potevano dividere in 3 mucchietti uguali, ognuno contenente 2 bilie, da cui si ricavava che 60:3 = 20 .

Nell'esempio seguente si vede una divisione per 7.

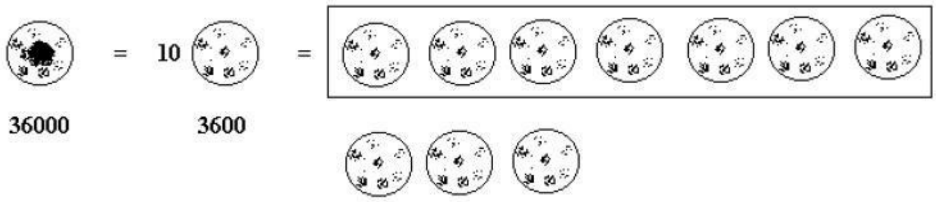
Esempio di Divisione "tramite gettoni": 36542 : 7

Esprimiamo il numero 36542 tramite i gettoni che costituiscono le "cifre" sumere:



I Passo.

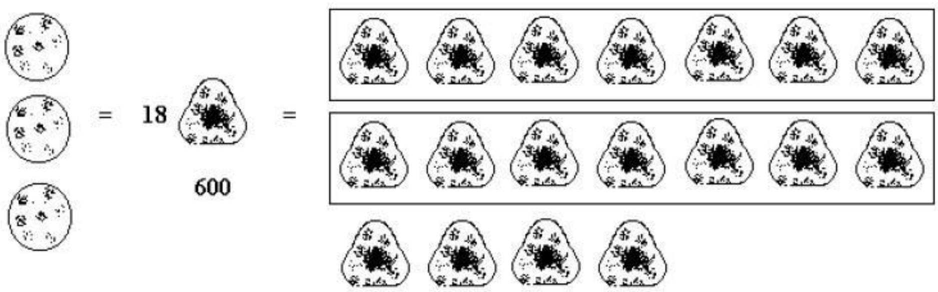
"Spiccioliamo" la grossa sfera perforata da 36000 in sfere da 3600:



Cerchiamo di fare dei gruppi per multipli di 7. Raggrupperemo un gruppo di 7 sfere e ne rimangono fuori 3.

II Passo.

"Spiccioliamo" le 3 sfere da 3600 avanzate al passo precedente in 18 coni da 600 l'uno:



Questa volta otteniamo 2 gruppi di 7 coni perforati con il resto di 4.

III Passo.

"Spiccioliamo" i 4 coni perforati in 40 coni da 60, a cui aggiungiamo i 9 che avevamo all'inizio otterremo 7 gruppi di 7 coni:

I gruppi (evidenziati) di 7 gettoni dello stesso tipo si possono agevolmente separare in 7 "mucchietti" ottenendo in ognuno di essi quello che è il risultato finale (cioè 5220):

3600 + **2x600** + **7x600**

= $\boxed{5220}$

Mentre il resto è costituito dai 2 conetti rimasti indivisi dall'inizio:  = **2**

Lo strumento per "far di conto" che ha avuto però una lunghissima vita nel continente europeo (e in varie forme anche altrove) è l'**Abaco a gettoni**.

La parola “abaco” viene dal semitico *abaq*, che significa "polvere", "sabbia", infatti gli abaci più antichi erano tavoli ricoperti da un sottile strato di sabbia sui quali con uno stilo si segnavano i calcoli. Non si sa quale popolo abbia inventato questa potente macchina calcolatrice, forse i babilonesi; fra gli esemplari a nostra disposizione (Maya, Egiziani, Cinesi, Romani...) i più antichi hanno più di 2000 anni.

L'abaco a gettoni (vedi Fig. 2.8), usato in varie forme prima dai Greci, poi dai Romani e rimasto in uso in Europa fino al 1700.

Ecco un esempio di abaco romano:

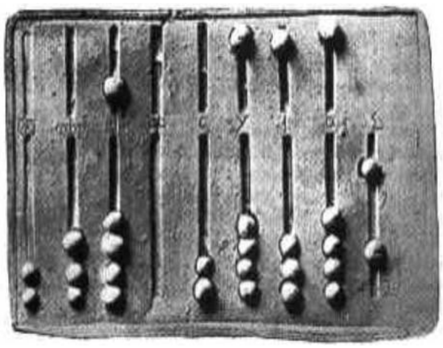


Fig. 1.9

Questo è un piccolo abaco portatile ed i gettoni sono qui fissati (scorrevoli) in delle scanalature. Qual è l’idea di base dell'abaco? Si tratta di una tavola divisa in colonne ove si pongono dei gettoni. Le varie colonne rappresentano le potenze del 10, ed ogni gettone postovi rappresenta una unità di quella potenza.

Nella seguente figura vediamo lo schema di come rappresentare il numero 120512.

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
$\overline{\mathrm{M}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	M	C	X	I
	●	●●		●●●●●	●	●●

Fig. 1.10

Dell'abaco si affermò successivamente una versione leggermente più complessa, che usava anche una base ausiliare "5", aggiungendo una casella (superiore) ad ogni colonna che rappresentava rispettivamente i valori 5, 50, 500,… Questo permetteva di risparmiare gettoni nei conti: un gettone in queste caselle ne rappresentava cinque della colonna sottostante (anche l'abaco di Fig. 2.7 è di questo tipo).

Nell'esempio in Fig. 2.11 abbiamo il numero 16476:

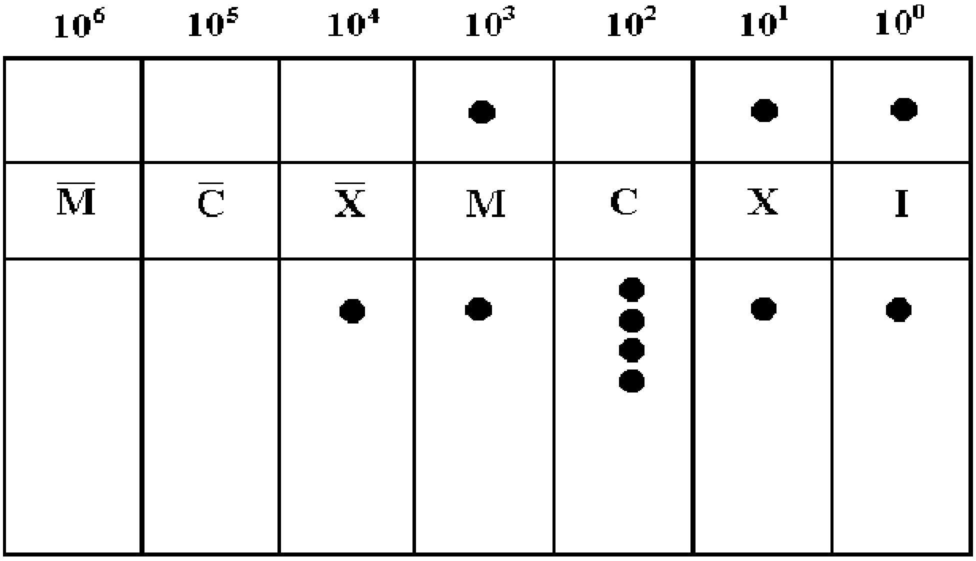


Fig. 1.11

Per eseguire somme e sottrazioni si aggiungevano e toglievano gettoni; naturalmente se in una colonna si arriva a più di dieci gettoni se ne tolgono 10 e se ne aggiunge uno nella colonna successiva,

Una forma più evoluta dell'abaco è il pallottoliere, rimasto in uso efficacemente in Russia, Cina e Giappone fin dopo la II guerra mondiale (dopo la guerra, in uno scontro di prova fra un contabile giapponese con un pallottoliere ed uno americano con una calcolatrice, il giapponese vinse sia in velocità che in precisione).

Vediamo di seguito alcuni fra le tipologie di abaco più usate:

L'abaco giapponese (*Soroban*):

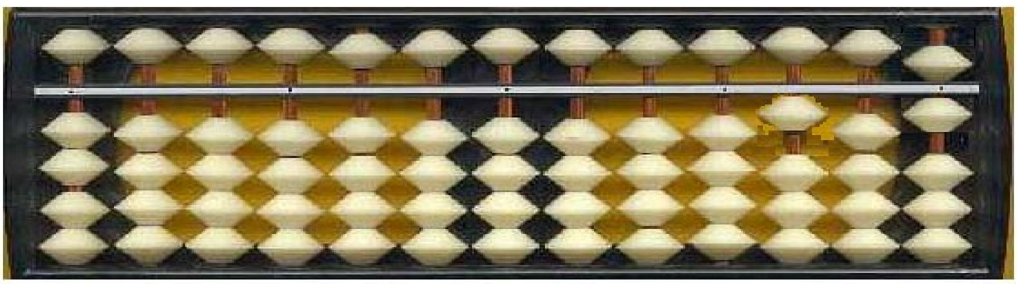


Fig. 1.12

Il funzionamento è analogo a quello visto sopra per l'abaco romano: le palline sopra l'asta valgono cinque di quelle sotto, ed ogni colonna rappresenta una potanza del dieci. Per segnare i numeri, si spostano le palline verso l'asse centrale (in Fig. 12 è rappresentato il numero 106).

L'abaco cinese (*Suan Pan*):

Fig. 1.13

L'unica differenza con quello precedente è che si hanno a disposizione 2 palline del valore di 5 per facilitare i calcoli.

E' da notare che su questi abachi le somme e sottrazioni vengono eseguite aggiungendo o togliendo il numero di palline corrispondenti all'addendo o al minuendo (la sottrazione va svolta da destra verso sinistra, "spicciolando" una pallina in dieci dell'unità inferiore se necessario). Le moltiplicazioni si svolgono come somme ripetute, ad esempio per moltiplicare 123 per 34 si sommerà 3 volte 1230 e poi 4 volte 123.

L'abaco russo:

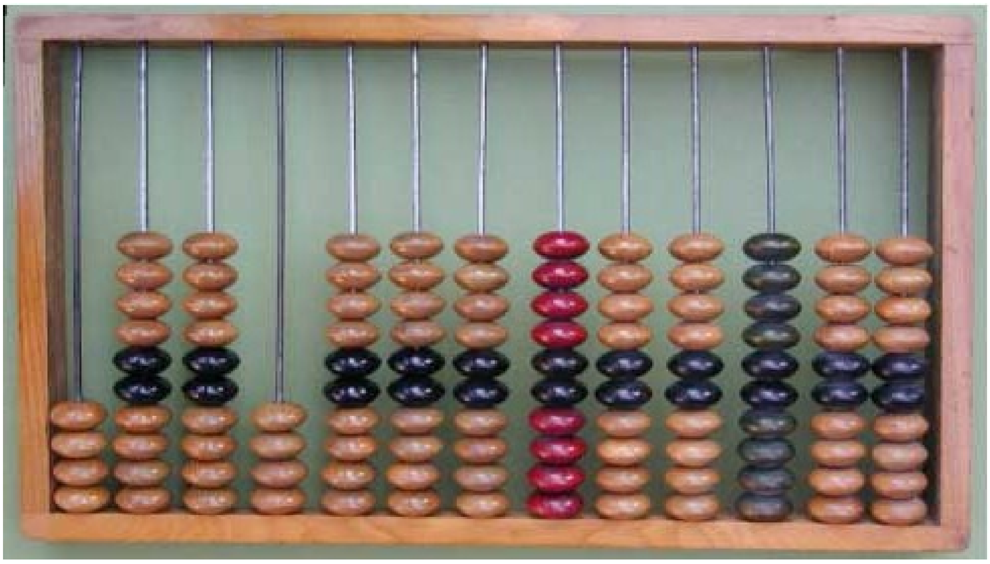


Fig. 1.14

Qui non si hanno a disposizione le palline per le cinquine, il funzionamento è analogo a quello della prima versione dell'abaco romano. Poiché veniva usato per i conti dai negozianti, si notano le file da 4 palline per i quarti di rublo e i quarti dei cento rubli (= 25 rubli).

Notiamo che in tutti questi abaci, la presenza di 13 (talvolta 15) file di palline significa che si è in grado di eseguire conti con cifre fino a 10^{12} e cioè nell'ordine delle migliaia di miliardi!

5 La scrittura del numero: le cifre.

Abbiamo visto i calcoli effettuati con i gettoni dai sumeri; ma i gettoni non erano solo strumento di calcolo, ma anche simboli: ad esempio un tipico contratto di prestito veniva siglato presso un "notaio" tramite una bolla di argilla, nella quale venivano introdotti i gettoni corrispondenti alla cifra in questione, e poi essa veniva cotta o essiccata con sopra le firme dei contraenti e del garante. Si rompeva solo alla restituzione, verificando l'esattezza dell'importo.

Il passaggio successivo fu quello di utilizzare delle tavolette di argilla (vedi Fig. 2.15a) su cui venivano disegnate le forme dei gettoni, ottenendo così una delle più antiche forme di "scrittura dei numeri", con la nascita di vere e proprie "cifre" scritte, come simboli numerici.

Fig. 1.15a: Tavolette di carattere numerico (ricostruzioni).

Gli esempi sopra mostrano degli "archivi", in cui era segnata la quantità di diversi oggetti in varie caselle, (II millennio a.C.). Le cifre venivano tracciate tramite appositi "calami" (vedi Fig. 2.15b): la punta del calamo serviva per incidere disegni sull'argilla, mentre le cifre si ottenevano appoggiando il fondo del calamo; facendolo verticalmente si otteneva un cerchio (grande o piccolo) che rappresentava le sfere di valore 10 o 3600; facendolo con il calamo obliquo si otteneva una tacca che ricordava i coni (piccoli o grandi) di valore 1 o 60; infine se sui simboli di cono o sfera grande si tracciava un cerchio piccolo, si ottenevano disegni che ricordavano i coni o le sfere traforati, di valore 600 o 36000.

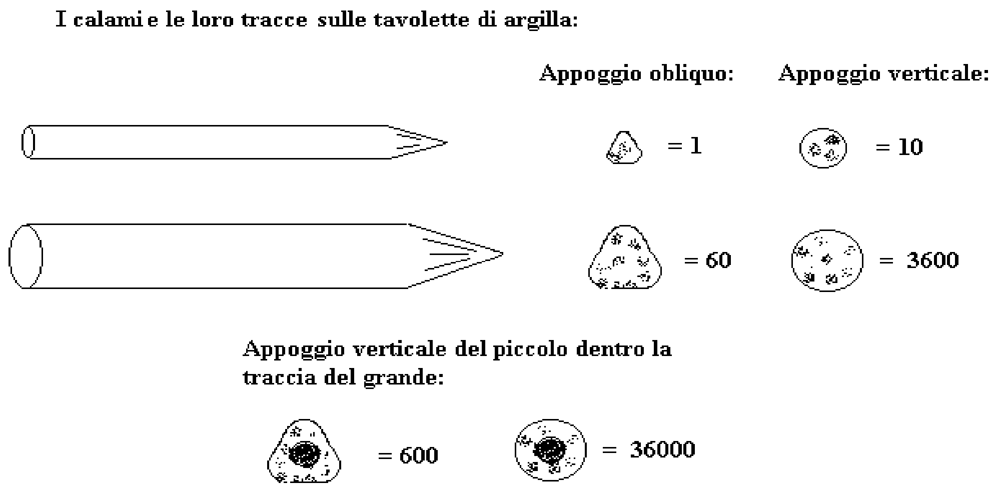


Fig. 1.15b: I calami.

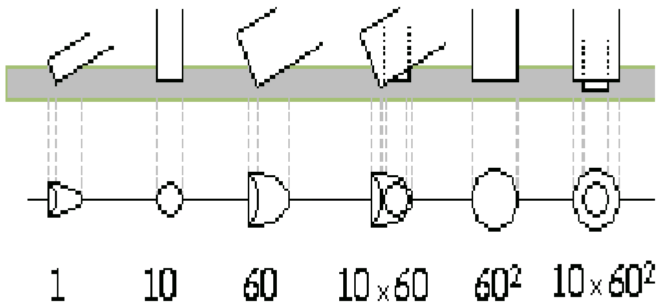


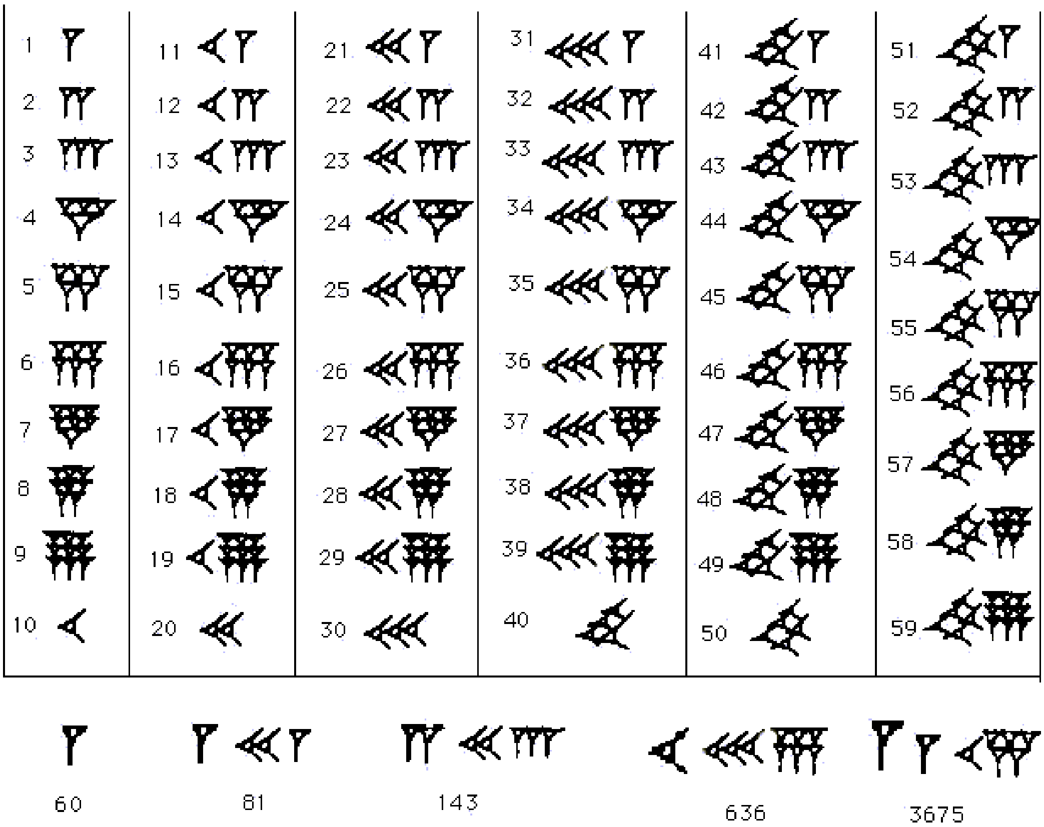
Fig. 1.15c: Come si appoggiano i calami per il disegno dei numeri.

Questo metodo di scrittura cambiò successivamente sotto i Babilonesi, che adottarono invece una più evoluta scrittura cuneiforme (vedi Fig. 2.16a),

Fig. 1.16a Babilonia, 2000-1800 a.C. (tavoletta, 8,1x6,5x2,7 cm, 26 linee in scrittura cuneiforme)

Sempre su tavolette d'argilla, in questa scrittura il valore dei simboli è posizionale, come nella nostra notazione, ma in base 60 (con base ausiliaria 10).

La Scrittura Cuneiforme



Problemi di ambiguità di interpretazione:

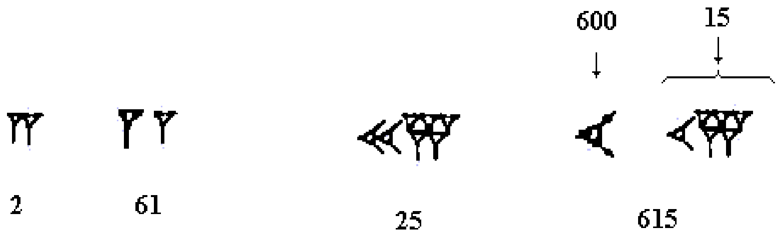


Fig. 1.16b

Il problema della mancanza dello "0" fu ovviato dai babilonesi introducendo un simbolo (simile a " < < ") che stava a indicare l'assenza di una potenza del 60, anche se non era considerato un numero vero e proprio.

L'altra forma di scrittura numerica più antica sono i geroglifici egizi, anch'essi risalenti a prima del 3000 a.C., nei reperti più antichi. I simboli hanno valori fissi e la scrittura è di tipo puramente additivo su base 10, vedi Fig. 2.17.

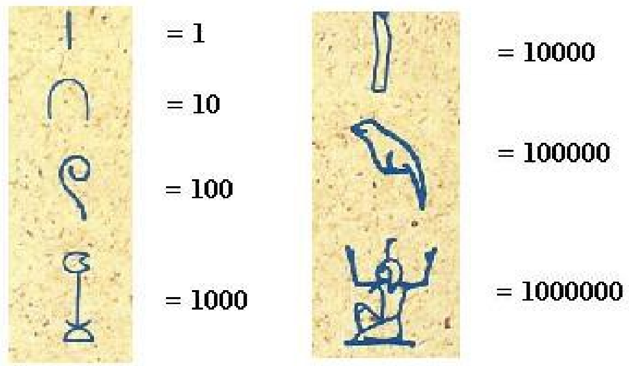


Fig 1.17a

Successivamente la scrittura geroglifica fu parzialmente sostituita dalla ***ieratica***, più semplificata, nella quale il sistema di scrittura numerica, anche se sempre additivo su base 10, acquista più simboli, per ridurre il numero dei caratteri necessari a rappresentare i numeri:

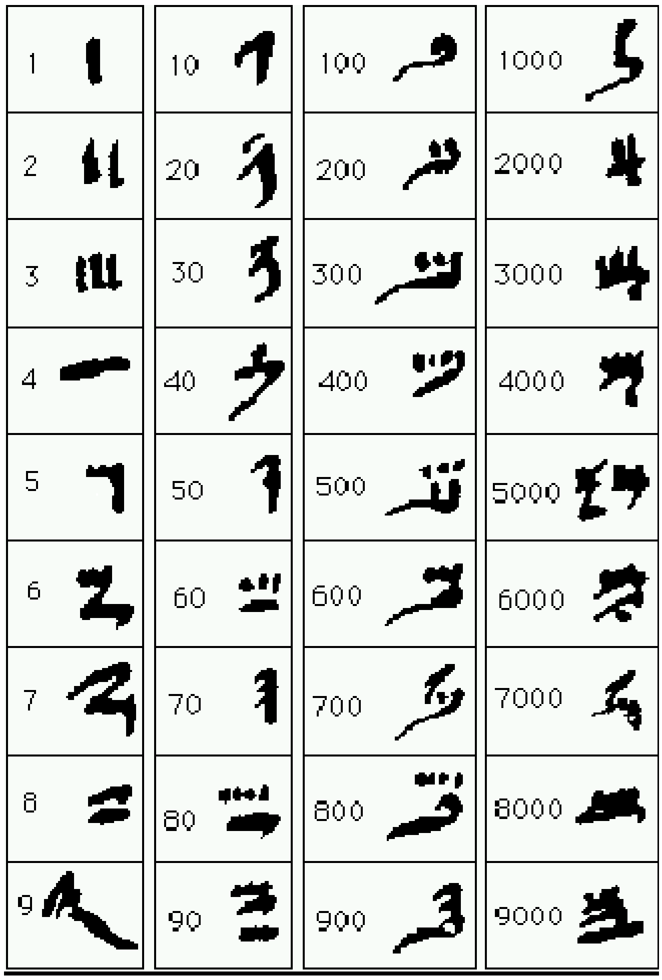


Fig 1.17b. Simboli numerici nella scrittura ieratica egizia.

Il più esteso papiro egizio di natura matematica giunto fino a noi è il *papiro di Rhind*, che deve il suo nome all'antiquario scozzese Henry Rhind che lo acquistò nel 1858 a Luxor, in Egitto. È anche noto come *Papiro di Ahmes* dal nome dello scriba che lo trascrisse verso il 1650 a.C. durante il regno di Aphophis (quinto sovrano della XV dinastia) traendolo da un papiro precedente composto fra il 2000 a.C. e il 1800 a.C. Si trova attualmente al British Museum, è scritto in ieratico ed è largo 33 cm e lungo 3 m. Contiene tabelle di frazioni e 84 problemi aritmetici, algebrici e geometrici con le relative soluzioni.

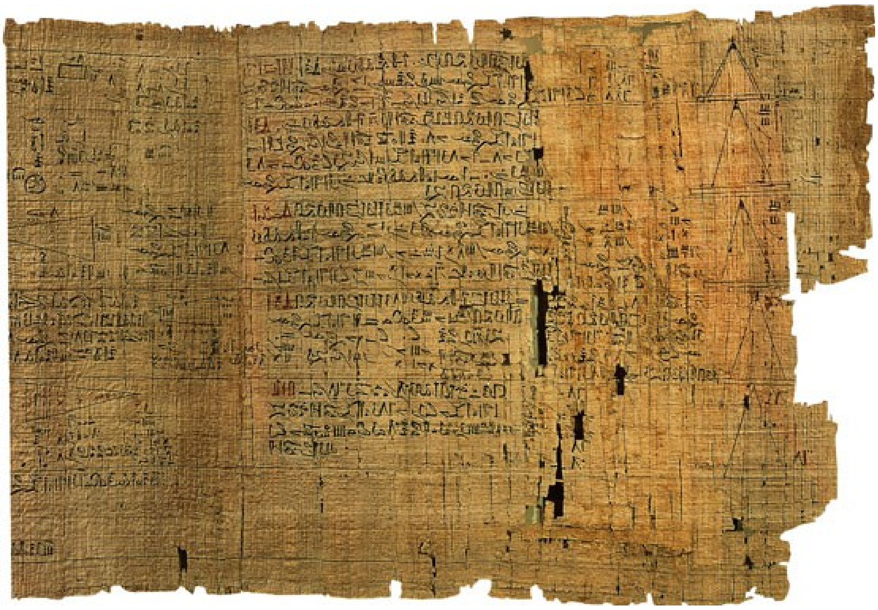


Fig 1.17c. Il papiro di Rhind (parte).

Le altre notazioni scritte più importanti (per la nostra storia) sono state quella greca e quella romana.

Le notazioni greche hanno avuto tre stadi essenziali: per prima fu adottata una notazione additiva in base dieci pura (come quella egizia), poi quella detta acrofonica (il simbolo del numero usava la prima lettera del nome), con base ausiliare 5, che vediamo nella figura seguente:

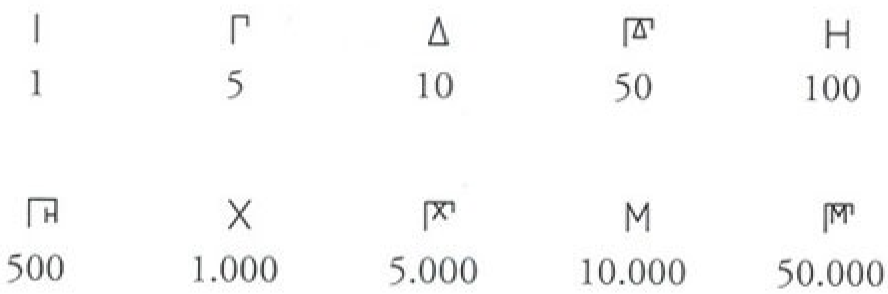


Fig 1.18a

Qui i simboli richiamano i nomi del numeri:

5 = Penta , 10 = Deka , 50 = Pentedeka , 100 = Hekaton , 500 = Pentehekaton ,

1000 = Khilioi , 5000 = Pentekhilioi , 10000 = Myrioi , 50000 = Pentemyrioi.

Infine si afferma la scrittura ionica, sempre additiva ed in base dieci, ma che usa tutte le lettere dell'alfabeto greco, assegnando ad ognuna di esse un valore numerico (vedi Fig. 2.18b) e giungendo così ad una certa efficacia rappresentativa, ma aumentando di molto il numero dei simboli usati. Da notare che sono presenti tre lettere arcaiche scomparse dall'uso comune e che rappresentano i numeri 6 *(stigma,* variante grafica del *digamma),* 90 *(koppa),* 900 *(sampì* o *san)* e che dopo un primo periodo in cui si usavano lettere maiuscole, si passò a quelle minuscole*:*

Unità		Decine		Centinaia	
1	α	10	ι	100	ϱ
2	β	20	ϰ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	ϑ	90	ϙ	900	ϡ

Fig. 1.18b

Esempi: 234 = σ λ δ ; 23 = ***x*** **γ** ; 15 = ι ε .

Combinando questi simboli si arrivava a scrivere fino al numero 999; per proseguire con le migliaia sino a 9000 (vedi Fig. 2.18c) si usava il segno delle unità con un apice a sinistra (uso prevalente).

,α	,β	,γ	,δ	,ϵ	,ϛ	,ζ	,η	,θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Fig. 2.18c

All'interno di questo sistema qualsiasi numero inferiore a 10.000 poteva venire scritto facilmente con quattro soli caratteri.

Per proseguire si indicavano le decine di migliaia mediante la lettera *M* (iniziale di *myrioi* = miriade) alla quale si sovrapponeva il numero delle decine di migliaia.

Per questo la parola “miriade” è rimasta nella nostra lingua per indicare una grande quantità: le miriadi (= decine di migliaia) erano usate per indicare tutti i numeri più grandi.

Le scritture che si affermano nell'area mediterranea sono tutte puramente additive ed in base dieci; lo erano infatti anche le scritture numeriche di Fenici, Ebrei e di altre popolazioni.

I Romani

I Romani non fanno eccezione: le cifre romane sono anch'esse additive in base dieci e con base ausiliare 5; ricordiamo i simboli usati ed i loro valori:

I = 1 ; **V** = 5 ; **X** = 10 ; **L** = 50 ; **C** = 100 ; **D** = 500 ; **M** = 1000.

Esempi: 27 = **XXVII** , 99 = **XCIX** , 588 = **DLXXXVIII**, 1939 = **MCMXXXIX**

I Romani erano (in origine) soprattutto un popolo di pastori, ed il conteggio delle pecore avveniva con l'intaglio di tacche su bastoni: per facilitare la lettura, ogni cinque tacche si faceva una tacca a forma di "V", ed ogni dieci una "X"; poi altre forme vennero introdotte per "50", "100" e così via (vedi Fig. 2.19a).

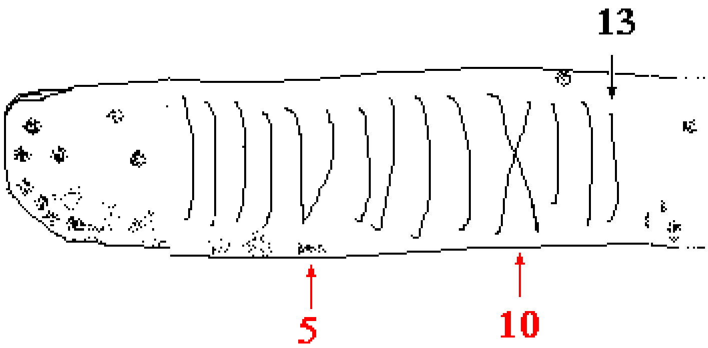


Fig. 1.19a

Nel sistema di numerazione romano c'è una novità: la *notazione sottrattiva*:

IV = 4 ; **XIX** = 19.

La notazione sottrattiva è un residuo della pratica dell' intaglio vista sopra; la scrittura " **IV** " invece di "**IIII**" (è da notare che comunque in reperti più antichi si trova anche la notazione **IIII**) ricorda la posizione del 4 nella serie: "**IIIIV**", come il "**IX**" nella serie: **IIIIVIIIIX**.

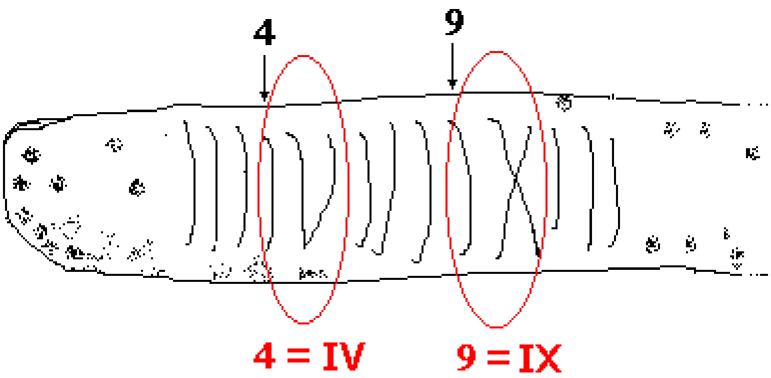


Fig. 1.19b

Per rappresentare numeri più grandi il sistema romano ricorre ai seguenti artifici: se si tira una linea sopra un simbolo il suo valore originale viene moltiplicato per 1000; i simboli:

$$\overline{\mathrm{V}}\ \ \overline{\mathrm{X}}\ \ \overline{\mathrm{L}}\ \ \overline{\mathrm{C}}$$

rappresentano i numeri 5.000, 10.000, 50.000 e 100.000 , mentre se si borda una lettera con due linee verticali ai fianchi ed una linea orizzontale soprastante, il suo valore originale viene moltiplicato per 100.000; i simboli:

$$\overline{|\mathrm{V}|}\ \overline{|\mathrm{X}|}\ \overline{|\mathrm{L}|}\ \overline{|\mathrm{C}|}\ \overline{|\mathrm{D}|}\ \overline{|\mathrm{M}|}$$

rappresentano rispettivamente i numeri 500.000, 1.000.000, 5.000.000, 10.000.000, 50.000.000 e 100.000.000 .

Gli antichi romani, infatti, non avevano parole per *"milioni"* o *"miliardi";* la loro massima espressione numerica erano le *"centinaia di migliaia"*. Ad esempio per indicare il numero *"un milione"* essi dicevano *"dieci centinaia di migliaia"*.

Il problema con le cifre greche e quelle romane è che esse furono una specie di "vicolo cieco": abbastanza efficaci per rappresentare i numeri, erano però quasi impossibili da usare per i calcoli, e il loro uso comporta la separazione fra la *scrittura* dei numeri ed il *calcolo* con essi, che viene invece eseguito con l'abaco.

6. Le nostre cifre: il sistema posizionale.

Concludiamo la nostra carrellata sulla storia dell'uso dei numeri prendendo in considerazione le cifre che usiamo oggi tutti i giorni ed il metodo "posizionale" con il quale le combiniamo per scrivere i numeri.

In cosa consiste il metodo posizionale?

La sua principale idea, come suggerisce il nome, è che i simboli usati per le cifre non hanno un valore fisso: il loro valore dipende dalla loro posizione nella scrittura del numero.

Ad esempio, quando scriviamo il numero 2372, che cosa intendiamo? Quella scrittura sta per "due migliaia, tre centinaia, sette decine e due unità", e cioè per:

$$2.10^3 + 3.10^2 + 7.10^1+2.10^0 .$$

Il valore di ognuna delle cifre di 2372 dipende dalla sua posizione: il primo "2" vale duemila, mentre l'ultimo "2" vale solo due (esattamente come le conchiglie nelle cordicelle di diverso colore che abbiamo già visto in 2.3).

Notiamo che invece nelle scritture additive il valore dei simboli è fisso: ad esempio nella scrittura romana di 72 = LXXII , i due "X" valgono sempre "10", indipendentemente dalla posizione.

I primi esempi noti di una scrittura numerica che sia basata sui seguenti elementi:

- notazione posizionale,
- base dieci,
- presenza dello zero,
- nove simboli (cifre) oltre lo zero,

risalgono al V secolo d.C. (nel trattato indiano di cosmologia *Lokavibhaga*, 485 d.C.); questo metodo si diffuse piuttosto rapidamente in India e in Indocina, e già dal secolo successivo si trovano documenti sull'uso di tale cifre per eseguire i conti.

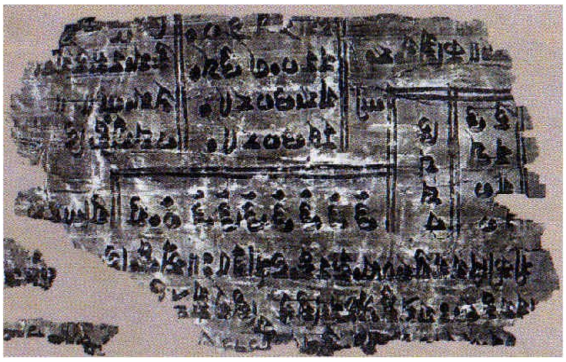


Fig.1.20: Un manoscritto indiano dell'epoca.

Nel 773, arriva a Bagdad un' ambasciata indiana con un omaggio al califfo Mansour ed ai suoi saggi: il calcolo e le cifre. Quasi un secolo dopo, Muhammad ibn Musa al-Khuwârizmi (morto dopo l'846) scrisse il primo testo in lingua araba presentando la numerazione indiana posizionale nel IX secolo (dal suo nome deriva la parola "algoritmo").

Nel X secolo, il monaco francese Gerbert d'Aurillac apprende il nuovo metodo dai Mori di Spagna e inizia a introdurlo in occidente, specialmente dopo esser divenuto Papa nel 999, col nome di Silvestro II.

Le tracce di uso della numerazione indo-araba in Europa sono comunque scarse fino al XIII secolo, quando il matematico pisano Leonardo Fibonacci (che aveva viaggiato molto fra gli arabi) scrisse il *Liber Abaci*, che illustra il sistema posizionale ed il suo uso, e che fu il testo che più contribuì alla sua introduzione sistematica in Europa.

Fig.1.21: Silvestro II e Leonardo Fibonacci

La figura seguente mostra alcuni passi dell'evoluzione dei simboli per le cifre Indo-Arabe:

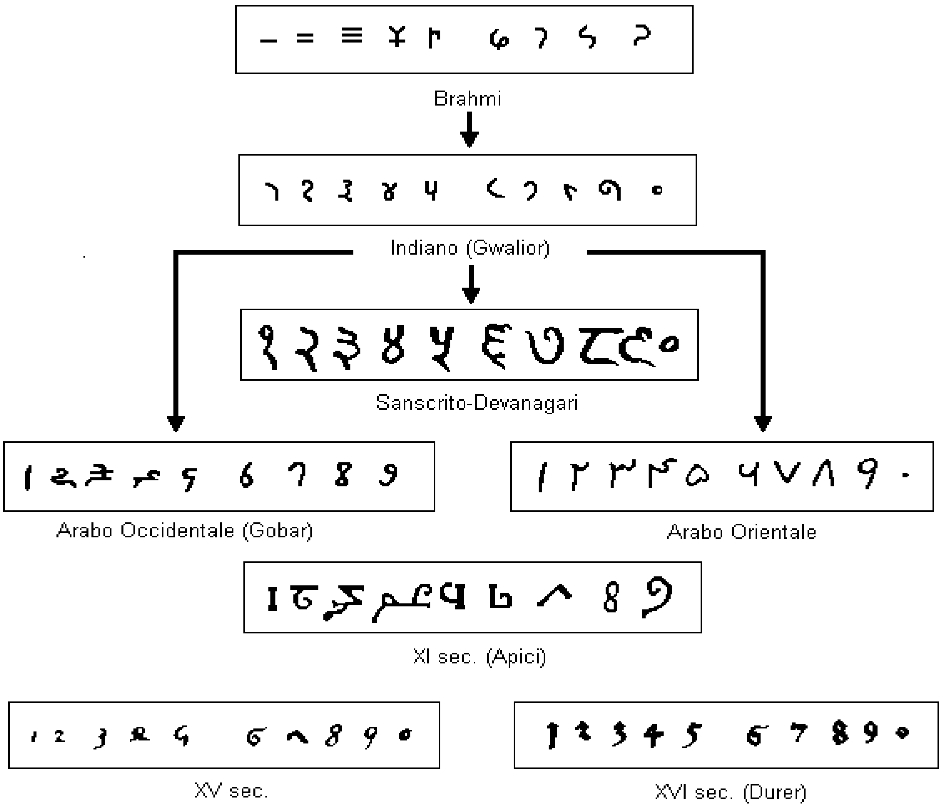


Fig.1.22: Evoluzione della scrittura delle cifre Ido-Arabe.

L'uso che facciamo tuttora delle cifre di origine indiana mostra la superiorità della scrittura posizionale rispetto a quella additiva romana (due ragioni fra tutte: la facilità nello scrivere numeri grandi e la possibilità di fare i conti usando le cifre scritte).

Comunque il suo uso efficiente richiede una novità: avere una cifra per il numero zero. In una notazione additiva, non c’è alcuna necessità di avere un simbolo per lo zero (aggiungere zero non serve a nulla), ma in una posizionale ogni cifra rappresenta il numero delle decine o centinaia o altre potenze del dieci (se la base è dieci), quindi se mancano le potenze di un certo ordine c’è bisogno di una cifra che rappresenti questa assenza:

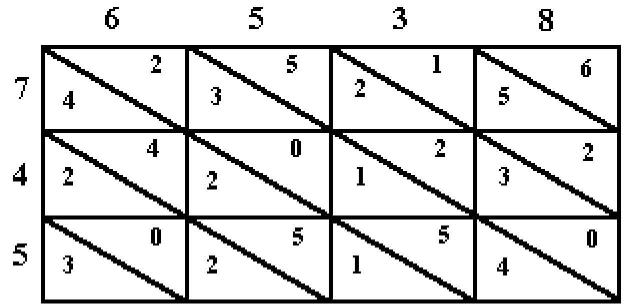
Senza lo zero come vedremmo la differenza fra 123 e 1203 o 1023 ?

Questa ambiguità era presente nella scrittura cuneiforme babilonese, anche se in questa scrittura incontriamo in una fase successiva, verso il III secolo a.C., la prima versione scritta dello zero: un simbolo (simile a “<<”) che stava a significare l'assenza di cifre corrispondenti a quella posizione. E' da notare che tale simbolo non era considerato un numero come gli altri, ma solo un “segnaposto” per indicare l'assenza di cifre in quella posizione. Questo è avvenuto anche per lo “zero” nella notazione indiana; all'inizio era un punto (o un circoletto) che indicava l'assenza di cifre in una data posizione, poi si è evoluto divenendo un cifra, “0”, come le altre ed un numero vero e proprio, che corrisponde alla “numerosità” dell'insieme vuoto.

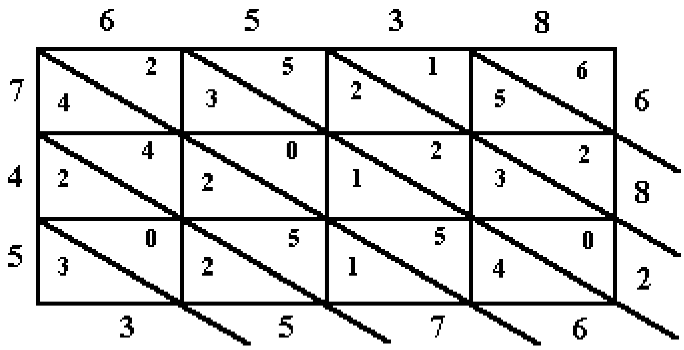
La penetrazione del nuovo sistema in Europa fu abbastanza lenta e all'inizio osteggiata; ancora nel XIV secolo in vari luoghi l'uso delle "cifre arabe" era proibito, temendo che fosse troppo facile alterarle per eseguire truffe.

Anche i cinesi usavano una numerazione posizionale in base dieci, ed arrivarono ad usare lo zero (di derivazione indiana) verso l' VIII secolo d.C. Qualche secolo dopo se ne trovano le tracce anche nella numerazione Maya. L'uso fattone però da babilonesi, cinesi e Maya fu limitato alla rappresentazione dei numeri, ed è invece nella sua introduzione da parte degli indiani, con un'efficiente notazione posizionale, che lo zero diventa parte di una scrittura che è anche ***strumento di calcolo.***

Già nel VI secolo si trovano documenti dell'uso delle cifre per eseguire i conti; ad esempio con il procedimento di moltiplicazione detto "per quadrettatura" o "per gelosia"; vediamolo ad esempio col moltiplicare 547 per 6538.

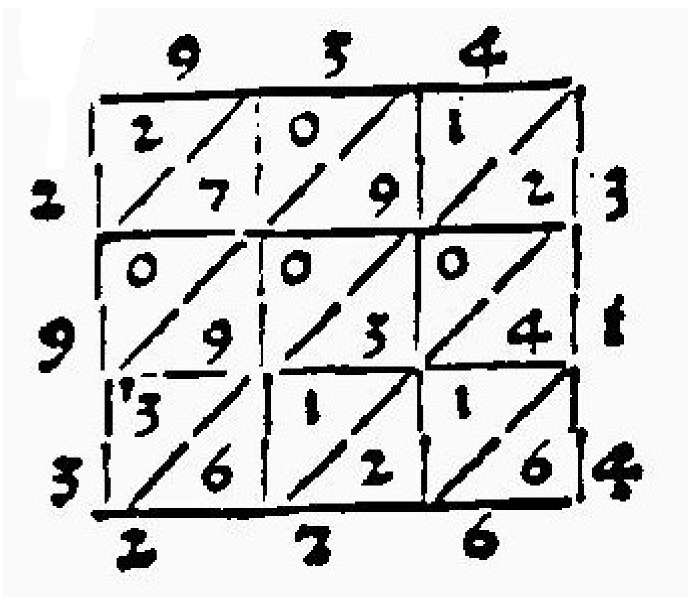


Bisogna riportare le cifre ai lati di una tabella come illustrato, dopodiché si esegue in ogni casella (divisa in due da una linea diagonale) la moltiplicazione delle due cifre corrispondenti. A partire dal "6" in alto a destra, in ogni fascia diagonale si troveranno, rispettivamente, le cifre del prodotto che rappresentano le unità, le decine, le centinaia, e così via. Sommando lungo tale fasce troveremo quindi il risultato cercato (3.576.286):



Questo metodo ci può sembrare molto lungo rispetto a quello da noi utilizzato oggi, ma allora era assolutamente più efficace di ogni altro calcolo "a mano", e permetteva una velocità nella moltiplicazione che i metodi precedenti l'uso delle cifre arabe non potevano uguagliare.

Sotto, un esempio di moltiplicazione "per gelosia" (954x314):

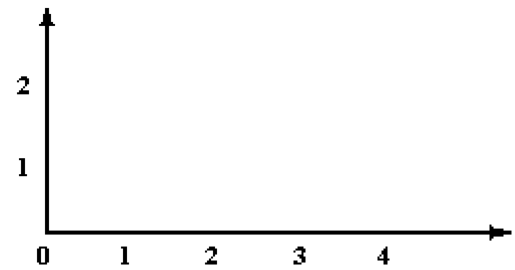


Un aneddoto (riportato in [**EC**]), narra di un negoziante tedesco del XV secolo che, volendo che il figlio studiasse ciò che serviva per il commercio, chiese consiglio ad un professore di matematica di gran fama nella sua città: questo rispose che se il ragazzo doveva solo apprendere a sommare e sottrarre poteva studiare presso una scuola tedesca, mentre se la sua preparazione doveva arrivare alla moltiplicazione, si sarebbe dovuto rivolgere ad una scuola più specializzata in Italia. L'aneddoto non va probabilmente preso alla lettera, ma illustra come il saper "far di conto" fosse davvero una capacità di pochi, a quel tempo.

Ancora nel Rinascimento si svolgevano gare di calcolo fra "Abacisti" e "Algoristi" (che usavano il calcolo scritto, con le cifre arabe) e l'abaco fu usato ancora a lungo, fino al XVIII secolo.

7. Numeri negativi, frazioni, ed oltre.

Per quanto riguarda invece l'uso degli "altri numeri", i primi documenti che riportano l'uso di numeri negativi sono antichissimi: tavolette con numerazione cuneiforme attorno al 2000 a.C., ma l'uso dei negativi come "numeri" a pieno titolo è molto tardo: ancora nei primi testi dove apparivano dei sistemi di coordinate cartesiane (nel '600) capita di trovare che si disegnava solo un quarto di piano per non usare le coordinate negative:



Uno dei primi testi che trattava diffusamente i numeri negativi fu l' *Algebra* di Rafael Bombelli (1627), che indicava con *p.* e *m.* il più ed il meno; questa notazione divenne sempre più accettato, fino ad essere usuale fra i matematici del XVIII secolo.

Per quanto riguarda i numeri razionali, un primo testo dove si menzionano problemi di divisione è il *Papyrus Rhind* (vedi sezone 2.5), un papiro egiziano che costituisce uno dei più antichi documenti scritti conservati (circa 1600 a.C.). Gli egiziani usavano solo frazioni del tipo $1/n$ (in simbologia moderna) ed esprimevano le altre come combinazioni di queste, ad esempio:

$$3/5 = 1/2 + 1/10 \; .$$

I babilonesi erano esperti nell'uso delle frazioni e l'uso della base 60 permetteva di esprimere facilmente molte frazioni del tipo $1/n$ ove n sia un divisore della base come multipli di 1/60, e cioè:

1/2 = 30/60, 1/3 =20/60, 1/4=15/60, 1/5=12/60, 1/6=10/60, 1/10=6/60, 1/12=5/60,

1/15=4/60, 1/20=3/60, 1/30 = 2/60.

Nella nostra base dieci ciò è più complicato (non si può esprimere 1/3 o 1/6 tramite frazioni "decimali"), nonostante gli indubbi vantaggi di "maneggiabilità" numerica del nostro sistema.

Ad esempio un computo approssimato di $\sqrt{3}$ in frazioni sessagesimali era (scritto con i nostri simboli):

$$\sqrt{3} \cong 1 + 43/60 + 55/60^2 + 23/60^3.$$

Che risulta (tradotto in numero decimale) esatto fino alla sesta cifra; una capacità di approssimazione notevolissima! Questo spiega il possibile vantaggio dell'uso di una base grande come il 60. Tali frazioni rimasero in uso a lungo (ad esempio le usa Tolomeo, circa 150 d.C.), anche se nel mondo greco si usava scrivere le frazioni in base dieci, con un apice per indicare il numeratore e due apici e la cifra ripetuta per il denominatore, ad esempio:

$$\iota\gamma'\ \kappa\theta''\ \kappa\theta'' = 13/29\ .$$

Il computo con i numeri razionali rimase una cosa piuttosto complicata anche dopo la diffusione della notazione posizionale indiana a base 10, in quanto l'uso dei numeri decimali al posto delle frazioni non viene introdotto che molto più tardi.

Infatti, sebbene nel mondo arabo se ne trovi già traccia attorno al 900 d.C., in Europa è solo nel 1585 che il matematico belga Simon Stevin scrive un libretto: *De Thiesme* (in francese: *La Disme,* e cioè il metodo di rappresentazione decimale), in cui spiega come scrivere e fare le operazioni sui numeri non interi usandone la rappresentazione decimale. Egli considerava questa "una meravigliosa invenzione", semplice ed efficace per evitare penosi conti con i "numeri rotti" (le frazioni). Nella prefazione scriveva:

Se tutto questo non fosse poi utilizzato dagli uomini d'oggi, saremo lieti lo stesso pensando che farà del bene ai nostri successori.

In effetti l'uso di questo metodo tardò a divenire patrimonio comune, se ancora quasi due secoli dopo il grande matematico Laplace scriveva di sperare che l'aritmetica decimale riuscisse a divenire di uso comune, superando i pregiudizi e le consuetudini che si oppongono sempre alla introduzione di nuove idee.

Un grande impulso all'uso della rappresentazione decimale venne con l'adozione del sistema metrico decimale per i pesi e le misure (metri, litri, chili, etc. che sostituiscono le vecchie misure locali in piedi, tese, braccia, galloni, once, ecc...). Il sistema fu adottato in Francia dopo la Rivoluzione, ed "esportato" nel resto d'Europa con le conquiste napoleoniche (l'Inghilterra ne è infatti rimasta "immune").

Ed i numeri reali? La scoperta dell'esistenza di misure irrazionali (cioè non esprimibili tramite frazioni) è molto antica, risalendo alla scuola pitagorica (circa 500 a.C.): è proprio attraverso il teorema di Pitagora che si scopre lo strano fatto che il numero $\sqrt{2}$ non è razionale.

La leggenda vuole che Ippaso di Metaponto, l'adepto della scuola che rivelò questa scoperta (tenuta segreta) perì in un naufragio per punizione degli dei! Perché tanto sconvolgimento? La scoperta che il rapporto fra due grandezze (lato e diagonale del quadrato) non poteva esprimersi con una frazione, metteva in crisi la visione pitagorica del mondo, che pensava ogni grandezza costituita di un numero finito di atomi. Quindi anche nel caso di due segmenti il loro rapporto avrebbe dovuto essere dato dal rapporto fra il numero di atomi costituenti il primo e quello degli atomi presenti nel secondo: la scoperta che ciò non era possibile rendeva questa visione atomistica molto più problematica.

I numeri irrazionali, non racchiudibili in un espressione decimale finita, né in una frazione, vennero a lungo guardati con sospetto, e non considerati come numeri veri e propri, ma "avvolti in una nuvola di infinito", mai precisi e di non chiaro uso, tranne per la possibilità di approssimarli per gli usi pratici (già Archimede, 200 a.C. , trovò ottime approssimazioni di $\sqrt{3}$ e di un altro numero irrazionale famoso: π, il rapporto fra diametro e circonferenza di un cerchio).

La costruzione rigorosa (e piuttosto complessa) dei numeri reali arriva soltanto nella seconda metà dell'ottocento, grazie all'opera di grandi matematici come Bolzano, Weierstrass, Dedekind e Cantor.

Un ultimo cenno va ai numeri complessi, cioè ai numeri dove appaiono radici di numeri negativi; il loro uso appare attorno al '500: si era allora scoperta la formula per risolvere le equazioni polinomiali di 3° grado (cioè ove l'incognita appare con esponente al massimo 3); ma quando si applicava tale formula a certe equazioni, come ad esempio: x^3-15x-4=0 , la formula dava , fra le soluzioni:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

un numero ove comparivano radici di numeri negativi!
Eppure si vede che le tre radici dell'equazione sono numeri reali: 4; $-2-\sqrt{3}$; $-2+\sqrt{3}$, e quindi ciò significava che nell'espressione scritta sopra le due radici "immaginarie" si devono poter "semplificare" in qualche modo, per dar luogo ad un numero reale.

L'emergere di espressioni di questo tipo portò a cercare di eseguire operazioni con questi numeri, per vedere come trattarli e come ridurli (quando possibile, cioè in casi come il precedente) ad espressioni "reali"; uno dei primi ad approfondire questo studio fu il già citato Bombelli. Lo studio dei numeri complessi continuò nei secoli successivi, ma il primo a farne una sistemazione definitiva fu (nell'ottocento) F.Gauss, che introdusse il metodo di rappresentazione sul piano usato anche oggi e che dimostrò il Teorema fondamentale dell'Algebra, che afferma che ogni equazione algebrica nel campo dei numeri complessi ha almeno una soluzione.